Universität Zürich[UZH]

Philosophisches Seminar

Einführung in die formale Logik I

Frühjahrssemester 2019

Vorlesung 2

Prof. Dr. Katia Saporiti

Was ist Logik?

... die Lehre vom korrekten Schliessen.

Aber was genau ist ein Schluss?

... und wann ist ein Schluss korrekt?

Logik als Lehre vom korrekten Schliessen

I. Was ist ein Schluss?
II. Gültigkeit und Wahrheit
III. Exkurs: Grundbegriffe der Mengenlehre
IV. Konsistente und inkonsistente Aussagen

Was ist ein Schluss? (Beispiele)

(1) Tolstoi ist der Autor von *Anna Karenina*.
- Eine einzelne Aussage ist kein Schluss.

(2) Der Tag geht, Johnnie Walker kommt.
- Auch mehrere *aufeinanderfolgende* Aussagen ergeben nicht unbedingt einen Schluss.

(3) Anna liebt ihren Mann nicht mehr und ist sehr unglücklich. Also wird sie ihn bestimmt bald verlassen.
- (3) mag in bestimmten Zusammenhängen als ein (gültiger) Schluss gelten, auch wenn die Schlussfolgerung nicht zwingend zu sein scheint.

(4) Frauen, die ihre Männer verlassen, müssen auf die gemeinsamen Kinder verzichten. Anna wird ihren Mann verlassen. Also wird sie auf ihren Sohn verzichten müssen.
- In (4) muss die letzte Aussage wahr sein, wenn die erste und die zweite Aussage wahr sind.

Was ist ein Schluss? (Merkmale)

- In einem Schluss soll eine Aussage *aus* einer oder mehreren Aussage(n) *folgen* und nicht nur auf sie folgen.
- In einem Schluss soll ein *berechtigter Übergang* von einer oder mehreren Aussage(n) zu einer weiteren Aussage erfolgen.
  - (Welcher Art ist diese Berechtigung?)
- In einem Schluss soll die Wahrheit einer oder mehrerer Aussage(n) für die Wahrheit einer weiteren Aussage sprechen.
- In einem Schluss (im engeren Sinn) soll sich die Wahrheit einer Aussage **zwingend** aus der Wahrheit einer oder mehrerer Aussage(n) ergeben.
  - (In diesem engeren Sinn sind (4) bis (6) jeweils plausible Kandidaten für einen Schluss.)

    (4) Frauen, die ihre Männer verlassen, müssen auf die gemeinsamen Kinder verzichten. Anna wird ihren Mann verlassen. Also wird sie auf ihren Sohn verzichten müssen.

    (5) Alfred ist grösser als Ben. Ben ist genauso gross wie Lisa. Also ist Lisa kleiner als Alfred.

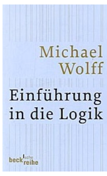
    (6) Alfred ist grösser als Ben. Also sind Alfred und Ben nicht gleich gross.

Was ist ein Schluss? (Definition)

- Ein **Schluss** ist eine Menge von mindestens zwei Aussagen, von denen eine (die **Konklusion**) aus einer Aussage oder aus mehreren Aussagen (der/den **Prämisse/n**) folgen soll.
- Eine Aussage $\mathcal{A}$ **folgt** aus den Aussagen $\mathcal{A}_1$ bis $\mathcal{A}_n$ genau dann, wenn es unmöglich ist, dass $\mathcal{A}_1$ bis $\mathcal{A}_n$ zutreffen (wahr sind), während $\mathcal{A}$ falsch ist.
- Ein Schluss ist genau dann **gültig**, wenn seine Konklusion aus den Prämissen folgt.

$$\left.\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l}\mathcal{A}_1\\ \mathcal{A}_2\\ \mathcal{A}_3\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \mathcal{A}_n\end{array}\right\} & \textit{Prämissen} \\ \hline \mathcal{A} & \textit{Konklusion}\end{array}\right\} \textit{Schluss}$$

Unter einem **Schluss** ist ein System von Sätzen zu verstehen, die wahre oder falsche Aussagen zum Inhalt haben und von denen angenommen wird, es folge einer von ihnen – die so genannte Konklusion – aus den übrigen – den so genannten Prämissen. Die Annahme, dass ein bestimmter Aussagesatz aus anderen Aussagesätzen **folgt**, ist dabei gleichbedeutend mit der Annahme, dass die Wahrheit dieser Sätze mit seinem Falschsein unverträglich ist. **Gültig** ist dementsprechend ein Schluss genau dann, wenn das Falschsein seiner Konklusion mit der Wahrheit seiner Prämissen unverträglich ist, so dass es nicht möglich ist, dass die Verneinung der Konklusion und alle Prämissen zusammen wahr sind. Jeder **gültige Schluss** bringt zum Ausdruck, dass seine Konklusion aus seinen Prämissen folgt.



(Michael Wolff, *Einführung in die Logik*, München 2006, § 2)

Ein Problem beim Definieren von „Schluss“

- Häufig wird, was ein Schluss ist, so charakterisiert, dass genaugenommen nur gültige Schlüsse – Schlüsse, deren Konklusion tatsächlich aus ihren Prämissen folgt – überhaupt als Schlüsse angesehen werden können.
- Solche Definitionen erlauben es im Grunde nicht mehr, zwischen gültigen und ungültigen Schlüssen zu unterscheiden oder von Fehlschlüssen zu sprechen. Denn ungültige Schlüsse oder Fehlschlüsse wären dann im eigentlichen Sinn des Wortes gar keine Schlüsse.
- Um diese Schwierigkeit zu vermeiden, sprechen wir davon, dass in einem Schluss die Konklusion aus den Prämissen *folgen soll*.
- Damit handeln wir uns allerdings eine andere Schwierigkeit ein. Es wird vom jeweiligen Kontext und einer Vielfalt seiner Aspekte abhängen, ob wir es im Einzelfall mit einem Schluss zu tun haben oder nicht. Entsprechend schwierig wird diese Frage manchmal zu entscheiden sein.
- Um auch dieser Schwierigkeit (bzw. dem Dilemma) zu entgehen, geben viele Autoren gar nicht an, was ein Schluss ist (verzichten auf eine Definition von „Schluss“) und begnügen sich damit anzugeben, was ein gültiger Schluss ist. Sie weichen dem Problem aus.

II. Gültigkeit und Wahrheit

Gültigkeit und Wahrheit

- Ein Schluss ist genau dann **gültig**, wenn für den Fall, dass seine Prämissen wahr sind, auch seine Konklusion wahr ist (also genau dann, wenn die Konklusion aus den Prämissen folgt).
- Ein Schluss ist genau dann **ungültig** (nicht gültig), wenn es möglich ist, dass seine Prämissen wahr sind, während gleichzeitig seine Konklusion falsch ist.
- Gültigkeit ist eine Eigenschaft von Schlüssen. Dass ein Schluss gültig ist, heißt, dass seine Prämissen in einer ganz bestimmten Beziehung zu seiner Konklusion stehen.
- Gültigkeit ist keine Eigenschaft einzelner Annahmen, Aussagen oder Behauptungen.
- Wahrheit dagegen ist eine Eigenschaft einzelner Annahmen, Aussagen, Behauptungen etc.
- Wahrheit ist keine Eigenschaft von Schlüssen (oder von Argumenten).
- Die Behauptung, eine bestimmte Aussage sei wahr oder etwas Bestimmtes der Fall, wird mit einem Schluss nur in Form eines hypothetischen Urteils erhoben.

Prämissen und Konklusionen in (gültigen) Schlüssen

Eine Annahme (Aussage), die in einem Schluss als Prämisse vorkommt, kann in einem anderen Schluss die Konklusion sein.

(1) Alle Hasen sind sterblich.
Harvey ist ein Hase.
Harvey ist sterblich.

(2) Alle Lebewesen sind sterblich.
Alle Hasen sind Lebewesen.
Alle Hasen sind sterblich.

Prämissen und Konklusionen gültiger Schlüsse müssen nicht wahr sein!

(3) Herr Schmidt wäscht jede Woche sein Auto.
Wer jede Woche sein Auto wäscht, der spinnt.
Herr Schmidt spinnt.

(4) Es schneit nur an Montagen
Es schneit.
Heute ist Montag.

(5) Alle Hunde sind Tiere.
Alle Tiere auf Rupert-K sind grün.
Alle Hunde auf Rupert-K sind grün.

Auch (4) und (5) sind gültige Schlüsse.

- Man kann nicht zeigen, dass ein Schluss gültig ist, indem man zeigt, dass seine Konklusion wahr ist.
- Man kann nicht zeigen, dass ein Schluss ungültig ist, indem man zeigt, dass seine Konklusion falsch ist.
- Man kann nicht zeigen, dass ein Schluss gültig ist, indem man zeigt, dass seine Prämissen wahr sind.
- Man kann nicht zeigen, dass ein Schluss ungültig ist, indem man zeigt, dass seine Prämissen falsch sind.

✓ Man kann zeigen, dass ein Schluss ungültig ist, indem man nachweist, dass seine Konklusion falsch sein kann, auch wenn seine Prämissen wahr sind (z.B. indem man ein Gegenbeispiel anführt).

✓ Man kann zeigen, dass ein Schluss gültig ist, indem man sich formaler Beweisverfahren bedient.

… Prämissen und Konklusionen gültiger Schlüsse

Ein gültiger Schluss kann

i. wahre Prämissen und eine wahre Konklusion haben,
ii. einige oder nur falsche Prämissen und eine wahre Konklusion haben,
iii. einige oder nur falsche Prämissen und eine falsche Konklusion haben.

(6)	Alle Diamanten sind hart.	***wahr***
	<u>Einige Edelsteine sind Diamanten.</u>	***wahr***
	Einige Edelsteine sind hart.	***wahr***
(7)	Katzen haben Flügel.	***falsch***
	<u>Vögel sind Katzen.</u>	***falsch***
	Vögel haben Flügel.	***wahr***
(8)	Alle Katzen haben Flügel.	***falsch***
	<u>Alle Hunde sind Katzen.</u>	***falsch***
	Alle Hunde haben Flügel.	***falsch***

(Beispiele aus: W. C. Salmon, *Logik*, Stuttgart 1983)

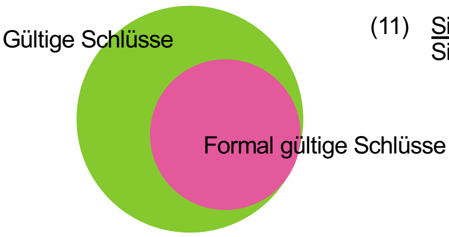
Gültige und formal gültige Schlüsse

– Verdankt sich die Gültigkeit eines Schlusses allein seiner logischen Form (Struktur), dann handelt es sich um einen formal gültigen Schluss.

– Zu einem formal gültigen Schluss gibt es keinen strukturgleichen Schluss, dessen Prämissen wahr sind und dessen Konklusion falsch ist.

(9) <u>Jörg ist Junggeselle.</u>
Jörg ist unverheiratet.

(10) <u>Michi ist Nikolais Vater.</u>
Nikolai ist Michis Sohn.



(11) <u>Sie ist dumm und boshaft.</u>
Sie ist dumm.

<u>p und q.</u>
p

(12) Alle Lebewesen sind sterblich.
<u>Alle Hasen sind Lebewesen.</u>
Alle Hasen sind sterblich.

Alle α sind β.
<u>Alle γ sind α.</u>
Alle γ sind β.

(9) Bis (12) sind gültige, (11) und (12) formal gültige Schlüsse.
(Manche Logiker sehen nur formal gültige Schlüsse als gültige Schlüsse an.)

III. Exkurs: Grundbegriffe der Mengenlehre

Grundbegriffe der Mengenlehre

- **Mengen** sind Zusammenfassungen beliebiger Dinge (z. B. Namen, Zahlen, Personen, Sätze, Häuser, Annahmen, Springbrunnen ...).
- Die Dinge, die in einer Menge enthalten sind, heißen **Elemente** der Menge.
- Schreibweise:

  a ist ein Element der Menge M: $a \in M$

  a ist kein Element der Menge M: $a \notin M$
- Die Elemente einer Menge müssen wohl bestimmt und wohl unterschieden sein: für jedes Ding muss entschieden werden können, ob es Element der Menge ist oder nicht; für jedes Ding muss entschieden werden können, ob es mit einem anderen identisch ist oder nicht.
- Eine Menge, die nur ein Element enthält, wird eine **Einermenge** genannt und muss von ihrem einzigen Element unterschieden werden.
- Die Menge, die kein Element enthält, wird als **leere Menge** oder **Nullmenge** bezeichnet und durch die Zeichen „∅“ und „{ }“ symbolisiert.
- Mengen können unendlich viele Elemente enthalten.

- Es gilt das sogenannte **Extensionalitätsprinzip:**

  Zwei Mengen sind genau dann miteinander identisch, wenn sie dieselben Elemente enthalten.
- Eine mögliche Art, Mengen anzugeben ist die Listenschreibweise:

  $\{0, 5, 7\} \qquad \{A, B, \Gamma, \Delta\}$
- Für die Identität von Mengen ist es nicht ausschlaggebend, wie die Elemente einer Menge angegeben werden (mit Hilfe welcher Namen oder Zeichen), daher gilt:

  $\{0, 5, 7\} = \{0, 2+3, 7\}$

  {Descartes, *Kritik der reinen Vernunft*} = {Renatus Cartesius, *KrV*}
- Ebenfalls unerheblich ist die Reihenfolge, in der die Elemente einer Menge angegeben werden, daher gilt:

  $\{0, 5, 7\} = \{5, 7, 0\}$

  {Nick Cave, Mozart, Tom Waits} = {Mozart, Tom Waits, Nick Cave}

- Weil ein Objekt etwas anderes ist als die Menge, die dieses Objekt enthält, verhält es sich andererseits wie folgt:

  $2 + 3 \neq \{5\}, \ \emptyset \neq \{\emptyset\}$
- Seien M und L Mengen. Dann ist L genau dann eine **Teilmenge** von M, wenn jedes Element von L auch Element von M ist.

  Es gilt: $L \subseteq M$
- Wenn L eine Teilmenge von M ist und nicht mit M identisch ist, dann nennt man L eine **echte Teilmenge** von M.

  Wenn $L \subseteq M$ und $L \neq M$, dann gilt: $L \subset M$
- Die **Vereinigung** zweier Mengen M und L ist diejenige Menge, die die Elemente von M und L enthält.

  $M \cup L = \{x: x \in M \text{ oder } x \in L\}$
- Der **Durchschnitt** zweier Mengen M und L ist die Menge derjenigen Elemente, die sowohl in M als auch in L enthalten sind.

  $M \cap L = \{x: x \in M \text{ und } x \in L\}$

Aus den bisherigen Definitionen ergibt sich:

– Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge.

Für alle Mengen M gilt: $\emptyset \subseteq M$.

– Die Teilmengenbeziehung ist transitiv.

Seien M, L und K drei Mengen mit $K \subseteq L$ und $L \subseteq M$, dann gilt: $K \subseteq M$.

– Zwei Mengen, die jeweils Teilmengen voneinander sind, sind miteinander identisch.

Wenn $L \subseteq M$ und $M \subseteq L$, dann ist $M = L$.

– Umgekehrt gilt auch, identische Mengen sind jeweils Teilmengen voneinander:

Wenn $M = L$, dann gilt: $L \subseteq M$ und $M \subseteq L$.

IV. Konsistente und inkonsistente Aussagen

- Zwei Aussagen sind genau dann **inkonsistent** (miteinander unverträglich), wenn nicht beide (zugleich) wahr sein können.
- Zwei Aussagen sind genau dann **konsistent** (miteinander verträglich), wenn beide (zugleich) wahr sein können.
- Eine **inkonsistente Menge** von Aussagen enthält inkonsistente Aussagen, bzw. Aussagen, die nicht alle zugleich wahr sein können.
- Eine **konsistente Menge** von Aussagen enthält nur konsistente Aussagen, bzw. Aussagen, die alle zugleich wahr sein können.
- Eine konsistente Menge von Aussagen kann durch das Hinzunehmen weiterer Aussagen zu einer inkonsistenten Menge von Aussagen werden.
    1. Harald ist Gerdas Bruder.
    2. Gerda ist kleiner als ihre Schwester Lilli.
    3. Lilli ist grösser als Harald.
    4. Fritz liebt Lilli.
    5. Lilli ist ein Einzelkind.

  Die Aussagen 1. bis 4. sind konsistent; die Aussagen 1. bis 5. sind inkonsistent.
- Eine inkonsistente Menge von Aussagen kann durch das Entfernen von Aussagen zu einer konsistenten Menge von Aussagen werden.

FIN